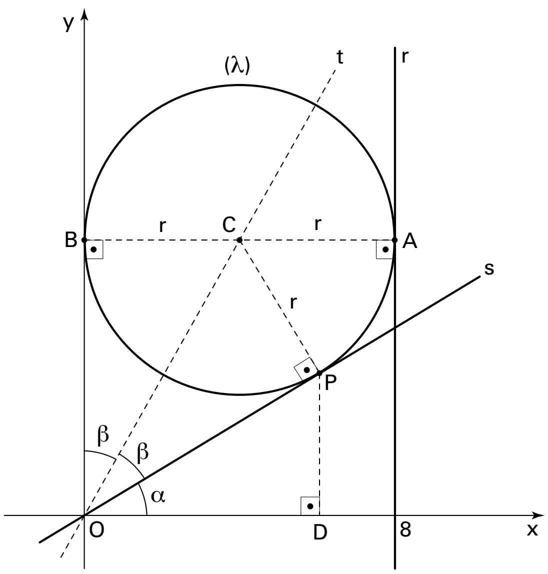
RESOLUÇÕES E RESPOSTAS

QUESTÃO 1:

a) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$
$x^2(x - 2) - 4(x - 2) = 0$
$(x^2 - 4)(x - 2) = 0$
$x^2 - 4 = 0$ ou $x - 2 = 0$
$x = 2$ ou $x = -2$
Resposta: $\{2, -2\}$

b) Para todo x, temos $-3 + \cos x < 0$.
Portanto a fração $\dfrac{-3 + \cos x}{x^2 - 9}$ é positiva se, e somente se, o denominador é negativo.
Temos $x^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.
Resposta: $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$

QUESTÃO 2:



a) (s) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x \rightarrow \operatorname{tg}\alpha = m_s \quad \therefore \quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad \therefore \quad \alpha = 30°$
Logo, $2\beta = 60° \quad \therefore \quad \beta = 30°$
Como AB = 8 então, $r = 4 \quad \therefore \quad x_C = 4$
ΔOBC: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{r}{OB} \quad \therefore \quad \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4}{OB} \quad \therefore \quad OB = \dfrac{12}{\sqrt{3}} \quad \therefore \quad OB = 4\sqrt{3} = y_C$
$\left.\begin{array}{l} C(4, 4\sqrt{3}) \\ r = 4 \end{array}\right\} (x - 4)^2 + (y - 4\sqrt{3})^2 = 16$
Resposta: $(x - 4)^2 + (y - 4\sqrt{3})^2 = 16$

b) Como OP = OB, então $OP = 4\sqrt{3}$
ΔODP: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{DP}{OP} \quad \therefore \quad \dfrac{1}{2} = \dfrac{DP}{4\sqrt{3}} \quad \therefore \quad DP = 2\sqrt{3} \quad \therefore \quad y_P = 2\sqrt{3}$
$\cos\alpha = \dfrac{OD}{OP} \quad \therefore \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{OD}{4\sqrt{3}} \quad \therefore \quad OD = 6 \quad \therefore \quad x_P = 6$
Logo, $P(6, 2\sqrt{3})$
Resposta: $P(6, 2\sqrt{3})$

QUESTÃO 3:

a) $\sqrt{2} \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\text{sen}x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \text{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \cos x\right)$

$= \sqrt{2} \cdot \left(\text{sen}x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x\right)$

$= \text{sen}x - \cos x$ (c.q.d.)

b) $f(x) = 1 + \sqrt{2} \cdot (\text{sen}x - \cos x)$

$f(x) = 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$f(x) = 1 + 2 \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$-1 \leqslant \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1 \quad \therefore \quad -2 \leqslant 2 \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 2 \quad \therefore \quad -1 \leqslant 1 + 2 \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 3 \quad \therefore \quad -1 \leqslant f(x) \leqslant 3$

Logo Im = [–1, 3]

Resposta: [–1, 3]

QUESTÃO 4:

a) A razão de semelhança entre dois quadrados consecutivos é $\frac{1}{2}$. Logo a razão entre as áreas desses quadrados é $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

A área do 1º quadrado é $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

A área do 2º quadrado é $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

A área do 3º quadrado é $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{32}$

A área do 4º quadrado é $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{128}$

Resposta: $\frac{1}{128}$

b) $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

Resposta: $\frac{2}{3}$

QUESTÃO 5:

a) Temos: $f(x) \in \mathbb{R} \iff x - 5 > 0$ e $15 - x > 0$

Isto é: $x > 5$ e $x < 15$

Resposta: $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 15\}$

b) $f(x) = \cancel{2} \cdot \dfrac{\log_2(x-5)}{\cancel{\log_2 4}} + \log_2(15 - x)$

$f(x) = \log_2[(x - 5)(15 - x)]$

$f(x) = \log_2(-x^2 + 20x - 75)$

$f(x)$ é máximo $\iff -x^2 + 20x - 75$ é máximo.

$-x^2 + 20x - 75$ é máximo $\iff x = \frac{-20}{2(-1)} = 10$

Resposta: 10

c) $f(10) = \log_2[(10 - 5)(15 - 10)]$

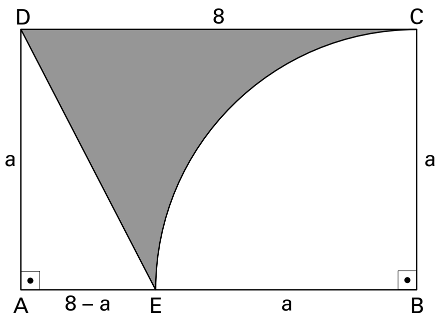
$f(10) = \log_2 5^2$

$f(10) = 2\log_2 5$

$f(10) = 2 \cdot 2{,}32 = 4{,}64$

Resposta: 4,64

QUESTÃO 6:



a) Devemos ter:

$$\frac{1}{2} \cdot (8 - a) \cdot a = 6$$

$$a^2 - 8a + 12 = 0 \begin{cases} a = 2 \\ \text{ou} \\ a = 6 \end{cases}$$

Resposta: a = 2 ou a = 6

b) A área sombreada é igual a área do retângulo menos a área do triângulo e menos a área do quarto de círculo.
Assim, temos:

$$8a - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (8 - a) - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi a^2}{4}$$

Multiplicando por 4:

$$32a - 2a(8 - a) - \pi a^2 = \pi a^2$$
$$32a - 16a + 2a^2 - \pi a^2 = \pi a^2$$
$$16a + 2a^2 = 2\pi a^2$$
$$16 + 2a = 2\pi a \quad (a \neq 0)$$
$$16 = 2\pi a - 2a$$
$$8 = \pi a - a$$
$$8 = a(\pi - 1) \quad \therefore \quad a = \frac{8}{\pi - 1}$$

Resposta: $a = \dfrac{8}{\pi - 1}$